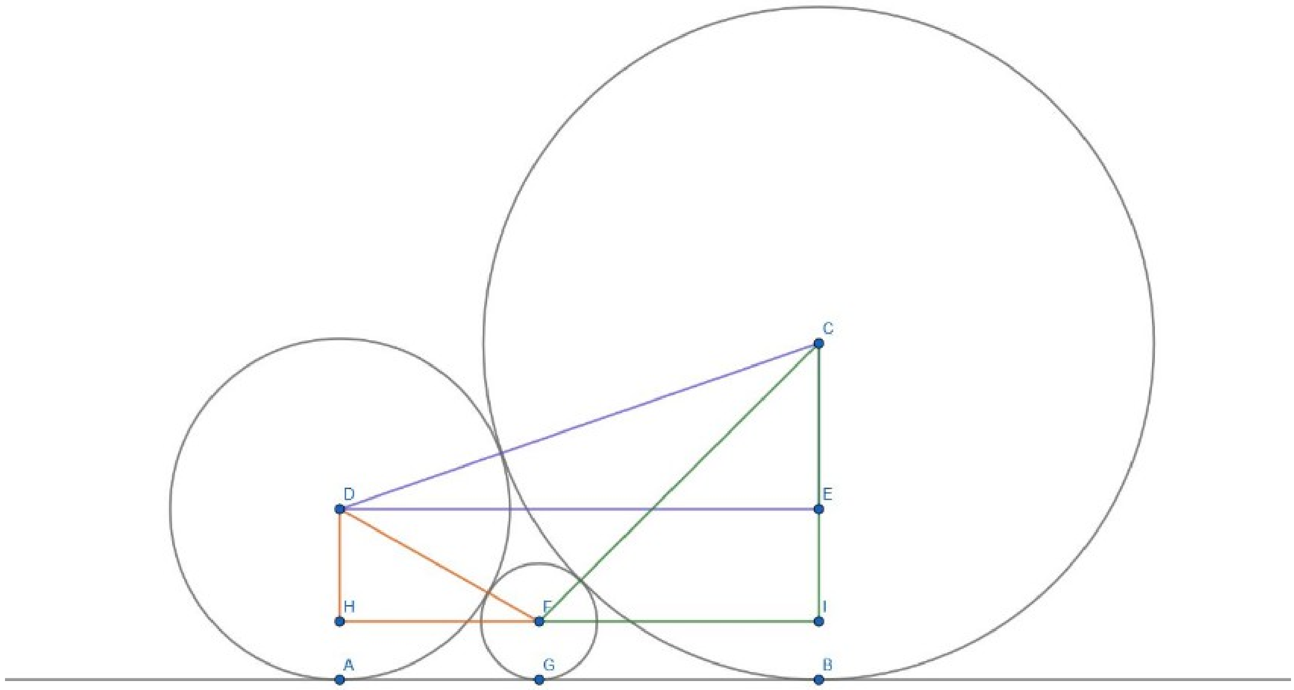
Résolution du Sangaku



Les triangles DHF ; DEC et FIC sont des triangles respectivement rectangles en H ;E et I. D'après le théorème de Pythagore, on obtient donc que :

$DC^2=DE^2+CE^2$ d'où : $DE^2 = DC^2-CE^2$

$= (Rgrand + Rmoyen)^2 - (Rgrand - Rmoyen)^2$

$= 4 x Rmoyen x Rgrand$

Ainsi DE = $2 x \sqrt{Rmoyen \ x \ Rgrand}$

$DF^2=DH^2+HF^2$ d'où : $HF^2=DF^2-DH^2$

$= (Rmoyen + Rpetit)^2 - (Rmoyen - Rpetit)^2$

$= 4 x Rmoyen x Rpetit$

Ainsi HF = $2 x \sqrt{Rmoyen \ x \ Rpetit}$

$CF^2=FI^2+IE^2$ d'où : $IF^2 = CF^2-IC^2$

$= (Rgrand + Rpetit)^2 - (Rgrand - Rpetit)^2$

$= 4 x Rgrand x Rpetit$

Ainsi IF = $2 x \sqrt{Rgrand \ x \ Rpetit}$

De plus, DE = HF + IF

d'où $2 x \sqrt{Rmoyen \ x \ Rgrand}$ **=** $2 x \sqrt{Rmoyen \ x \ Rpetit} + 2 x \sqrt{Rgrand \ x \ Rpetit}$

En divisant l'ensemble de l'expression par $2 x \sqrt{Rgrand \ x \ Rmoyen \ x \ Rpetit}$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{Rpetit}} = \frac{1}{\sqrt{Rmoyen}} + \frac{1}{\sqrt{Rgrand}}$$

CQFD